数理解析研究所講究録
319巻 1978年 1-8

ある同変微分同型群の完全性について

信州大 教養　阿部孝順

§1 序

J. Mather [3] と W. Thurston [5] により境界をもたない C^∞ 多様体に対して，$\mathrm{Diff}^r(M)_0$ をコンパクトな台をもつ C^r イソトピーにより M の恒等写像 1_M とイソトピックな微分同型のつくる群とすると $\mathrm{Diff}^r(M)_0$ は完全である；即ちその交換子群と一致することを証明されている。但しイソトピー H_t がコンパクト台をもつとは，M のコンパクト部分集合 K が存在して，$H_t(x)=x$ $(\forall x\in M-K,\ 0\leqq t\leqq 1)$，のことであるとする。ここでは，コンパクトリー群 G が M に自由に作用している場合に同様の問題を考えることにする。

M を境界をもたない m 次元 C^∞ 多様体とし，コンパクトリー群が M に右から自由に作用しているとする。$\mathrm{Diff}_G^r(M)_0$ をコンパクトな台をもつ同変 C^r イソトピーにより 1_M と G-イソトピックな M の同変 C^r 微分同型のつくる群とすると

次のことが証明できる。

<u>定理</u>　$1 \leq r \leq \infty$, $r \neq m-q+1$, $m-q \geq 1$ ならば $\mathrm{Diff}^r_G(M)_0$ は完全である。但し $q = \dim G$.

（$G = T^q$ のときは，A. Banyaga [2] の結果である）

なおこれは，福井和彦氏との共同の仕事である。

§2　準備

K を M のコンパクト部分集合とし，$\mathrm{Diff}^r_{G,K}(M)_0$ を K を台にもつ $\mathrm{Diff}^r_G(M)_0$ の元で K を台にもつ同変 C^r イソトピーにより 1_M とイソトピックなもの全体の群で，C^r 位相を入れておく。次の補題は任意の G－多様体に対しても成立する。

<u>補題 1</u>　（c.f. Palis, Smale [4] Lemma 3.1）

$\{V_i\}$ $(i=1,\ldots,n)$ を M の有限開被覆とする。N を $\mathrm{Diff}^r_{G,K}(M)_0$ の 1_M の近傍とする。このとき次の条件をみたす 1_M の近傍 $N_0 \subset N$ が存在する：${}^\forall f \in N_0$ に対して ${}^\exists f_i \in N$ $(i=1,\ldots,n)$;

a）　f_i は台が $V_i \cap K$ に含まれる同変 C^r イソトピーにより 1_M と G－イソトピック

b）　$f = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$.

$\mathrm{Diff}^r_G(M)_0 = \bigcup_{K:\text{コンパクト}} \mathrm{Diff}^r_{G,K}(M)_0$ であるから補題1を用いると次のことが証明される。

系2　$\mathbb{R}^{m-q}\times G$ を自然に G を右から作用させて G-多様体と考えるとき，$\mathrm{Diff}^r_G(\mathbb{R}^{m-q}\times G)_0$ が完全なことが証明されると，$\mathrm{Diff}^r_G(M)_0$ も完全なことが証明される。

系2より定理の証明は局所的な問題に還元される。$U=\mathbb{R}^{m-q}$，$\pi: U\times G\longrightarrow U$ を自然な射影とする。$P:\mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0\longrightarrow \mathrm{Diff}^r(U)_0$ を $P(h)(x)=\pi(h(x,1))$　($h\in \mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0$，$x\in U$) とする。このとき $1\longrightarrow \mathrm{Ker}P\longrightarrow \mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0\longrightarrow \mathrm{Diff}^r(U)_0\longrightarrow 1$ は群の完全列である。G_0 をリー群 G の単位元の連結成分とする。$f:U\longrightarrow G_0$ に対して $\mathrm{supp}\, f=\overline{f^{-1}(G_0-\{1\})}$ とする。$C^r(U,G_0)_0=\{f:U\longrightarrow G_0$ C^r 写像；f はコンパクトな台をもつ C^r ホモトピーで零写像とホモトピック$\}$ として C^r 位相を入れる。

補題3　$L: \mathrm{Ker}P\longrightarrow C^r(U,G_0)_0$ を次の式をみたすように定義する：$h(x,1)=(x,L(h)(x))$，$h\in\mathrm{Ker}P$，$x\in U$。このとき L は群の間の同型写像である。

次の補題は定理を証明するのに大切である。

補題4　$\delta>0$，B_δ を 0 を中心とする $\mathbb{R}^n$ における半径 δ の閉円板とする。$u:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$　($n\geq 1$) を零写像に C^1 位相で十分に近い C^r 関数で B_δ に台をもっているとする。こ

をとき C^∞ 関数 $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $\mathrm{supp}(v) \subset B_{\delta'}$ $(\delta' = 2\sqrt{3}\delta)$, $|v(x)| \leq 3\delta$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ と B_δ に台をもつ C^r イソトピーで $1_{\mathbb{R}^n}$ とイソトピックな C^r 微分同型 $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が存在して $u = v \circ \varphi - v$ をみたす。

［証明］ $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + u(x), x_2, \ldots, x_n)$ と定義すると仮定より u は 0 に十分近いから C^r 微分同型である。 $\varphi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(0 \leq t \leq 1)$ を $\varphi_t(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + tu(x), x_2, \ldots, x_n)$ と定義すると φ_t は B_δ に台をもつイソトピーで $\varphi_0 = 1_{\mathbb{R}^n}$, $\varphi_1 = \varphi$。 $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\xi(x) = x$ $(|x| \leq 2\delta)$, $|\xi(x)| \leq 3\delta$ $(2\delta \leq |x| \leq 3\delta)$, $\xi(x) = 0$ $(|x| \geq 3\delta)$ とする。 $\mu : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\mu(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 1$ $(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq \delta^2)$, $\mu(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$ $(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \geq 3\delta^2)$, $|\mu(x)| \leq 1$ $(x \in \mathbb{R}^{n-1})$ をみたす C^∞ 関数とする。 $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を $v(x_1, \ldots, x_n) = \xi(x_1) \cdot \mu(x_2, \ldots, x_n)$ とすると v は $B_{\delta'}$ に台をもつ C^∞ 関数で $u = v \circ \varphi - v$ をみたす。

注. A Banyaga は [1] で上の補題を $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$ に対して示しているが，証明が正しくない。

$L(G_0)$ を G_0 のリー環とし $\{X_1, \ldots, X_q\}$ を $L(G_0)$ の基底とする。 $\Phi : L(G_0) \longrightarrow G_0$ を $\Phi(\sum_{i=1}^{q} a_i X_i) = (\exp a_1 X_1) \cdots (\exp a_q X_q)$ とすると Φ は 0 の ε - 近傍 V で微分同型である。 $W = \Phi(V)$ と

おくとWは1の近傍である。 $e: U \longrightarrow W$ を $e(x)=1$ $(\forall x\in U)$ とすると次の補題が成立する。

<u>補題 5</u> $f: U\longrightarrow W$ を C^r 写像で $\mathrm{supp} f$ が U におけるある δ-円板 $(3\delta<\varepsilon)$ に含まれかつ C^1 位相で e に十分近いものとする。このとき $f_i \in C^r(U,G_0)$, $\varphi_i \in \mathrm{Diff}^r(U)_0$ が存在し $(i=1,\dots,n)$, $f=(f_1^{-1}\cdot(f_1\circ\varphi_1))\cdots(f_q^{-1}\cdot(f_q\circ\varphi_q))$ をみたす。

[証明] $\tilde f = \Phi^{-1}\circ f$ とおくと C^r 写像 $a_i: U\longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1,\dots,q$, が存在して $\tilde f(x) = a_1(x)X_1+\cdots+a_q(x)X_q$ $(x\in U)$ をみたす。補題4より, C^r 写像 $v_i: U\longrightarrow\mathbb{R}$; $\mathrm{supp}\, v_i$ はコンパクトで $|v_i(x)|\le 3\delta$ $(x\in U)$ と $\varphi_i\in \mathrm{Diff}^r(U)_0$ $(i=1,\dots,q)$ が存在して $a_i = v_i\circ\varphi_i - v_i$ をみたす。 $f_i: U\longrightarrow W_i$ を $f_i(x) = \exp(v_i(x)X_i)$ $(x\in U)$ とすると f_i はコンパクト台をもつ C^r 写像で又 $f_i\in C^r(U,G_0)$ で $f(x) = (f_1(x)^{-1}\cdot f_1(\varphi_1(x)))\cdots (f_q(x)^{-1}\cdot f_q(\varphi_q(x)))$ $(x\in U)$ をみたす。

$\varphi\in\mathrm{Diff}^r(U)_0$ に対して $\tilde\varphi \in \mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0$ を $\tilde\varphi(x,g) = (\varphi(x), g)$, $x\in U$, $g\in G$ と定義する

<u>補題 6</u> $h\in \mathrm{Ker}\, P$, $f=L(h)$ とする。 $\varphi\in \mathrm{Diff}^r(U)_0$ に対して $L(h^{-1}\circ\tilde\varphi^{-1}\circ h\circ\tilde\varphi) = f^{-1}\cdot(f\circ\varphi)$ をみたす。

§3　定理の証明と系

<u>命題7</u>　$\mathrm{Ker}\,P = [\mathrm{Ker}\,P,\ \mathrm{Diff}^r(U\times G)_0]$

〔証明〕　$\mathrm{Ker}\,P_c \ni h$ に対して $f = L(h)$ とおくと補題1と同様の証明により f を次のように表わすことができる；$\exists f_i : U \to W$ C^r 写像，$i=1,\cdots,\ell$，$\mathrm{supp}\, f_i$ は U のある δ－円板に含まれかつ f_i は C^1 写像で ε に十分近く $f = f_\ell \cdot f_{\ell-1} \cdots f_1$ をみたす。従って f は補題5をみたす f_i の積で表わせる。従って補題5より $\exists f_{ij} \in C^r(U, G_1)$，$\exists \varphi_{ij} \in \mathrm{Diff}^r(U)_0$　$(i=1,\cdots,\ell,\ j=1,\cdots,q)$ で $f_i = (f_{i1}^{-1}\cdot(f_{i1}\circ\varphi_{i1}))\cdots(f_{iq}^{-1}\cdot(f_{iq}\circ\varphi_{iq}))$ をみたす。補題3より $L(h_{ij}) = f_{ij}$ をみたす $h_{ij} \in \mathrm{Ker}\,P$ が存在する。補題6より $L(h) = f = ((f_{11}^{-1}\cdot(f_{11}\circ\varphi_{11}))\cdot(f_{12}^{-1}\cdot(f_{12}\circ\varphi_{12}))\cdots(f_{\ell q}^{-1}\cdot(f_{\ell q}\circ\varphi_{\ell q}))) = L((h_{11}^{-1}\circ\tilde{\varphi}_{11}^{-1}\circ h_{11}\circ\tilde{\varphi}_{11})\circ(h_{12}^{-1}\circ\tilde{\varphi}_{12}^{-1}\circ h_{12}\circ\tilde{\varphi}_{12})\circ\cdots\circ(h_{\ell q}^{-1}\circ\tilde{\varphi}_{\ell q}^{-1}\circ h_{\ell q}\circ\tilde{\varphi}_{\ell q}))$．$L$ は同型写像だから $h \in [\mathrm{Ker}\,P,\ \mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0]$．

<u>定理の証明</u>　系2より $M = U\times G$ のとき $H_1(\mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0) = 0$ を示せばよい．$1 \to \mathrm{Ker}\,P \to \mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0 \to \mathrm{Diff}^r(U)_0 \to 1$ は群の完全列だから　$\mathrm{Ker}P/[\mathrm{Ker}P, \mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0] \to H_1(\mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0) \to H_1(\mathrm{Diff}^r(U)_0) \to 0$ は完全列である．J. Mather [3] と W. Thurston [5] より $H_1(\mathrm{Diff}^r(U)_0) = 0$ であるから，命題7より $H_1(\mathrm{Diff}^r_G(U\times G)_0) = 0$。

<u>系</u> Mを境界をもたない可微分なm次元G-多様体で唯1つの軌道型をもつとする。$1 \leq r \leq \infty$, $r \neq \dim M/G + 1$, $\dim M/G \geq 1$をみたすならば$\mathrm{Diff}^r_G(M)_0$は完全である。

[証明] HをMの一点の等方部分群とし$N(H)$をHのGにおける正規化群とする。$M^H = \{x \in M \,;\, h \cdot x = x \ (\forall h \in H)\}$とおく。このとき$\mathrm{Diff}^r_G(M)_0$は群として$\mathrm{Diff}^r_{N(H)/H}(M^H)_0$と同型である。$M^H$は自由な$N(H)/H$-多様体だから，定理より$\mathrm{Diff}^r_{N(H)/H}(M^H)_0$は完全である。

参考文献

[1] A. Banyaga : On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms, Topology 16, 279-283 (1977)

[2] A. Banyaga : Sur les groupe des automorphismes d'un T^n-fibré principal. C. R. Acad. Paris., 284, Série A 619-622 (1977)

[3] J. N. Mather : Commutators of diffeomorphisms I and II. Comment. Math. Helv., 49, 512-528 (1974) and 50, 33-40 (1975)

[4] J. Palis and S. Smale : Structual stability theorems. Gloval Analysis (Symp. Pure. Math. XIV) Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 223-231 (1970).

[5] W. Thurston : Foliations and group of diffeomorphisms, Bull. Amer. Math. Soc., 80, 304–307 (1974)